

# Оцінки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості в інтегральних метриках

Т. А. Степанюк

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк

## Анотація

В метриках просторів  $L_s$ ,  $1 < s \leq \infty$ , одержано точні за порядком оцінки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів згорток періодичних функцій, що належать одиничній кулі простору  $L_1$ , з твірним ядром  $\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(kt - \frac{\beta\pi}{2})$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ , коефіцієнти  $\psi(k)$  якого такі, що добуток  $\psi(n)n^{1-\frac{1}{s}}$ ,  $1 < s \leq \infty$ , не може прямувати до нуля швидше за кожну степеневу функцію і, крім того,  $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2} < \infty$  при  $1 < s < \infty$  або  $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$  при  $s = \infty$ .

In metric of spaces  $L_s$ ,  $1 < s \leq \infty$ , we obtain exact order estimates of best approximations and approximations by Fourier sums of classes of convolutions the periodic functions that belong to unit ball of space  $L_1$ , with generating kernel  $\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(kt - \frac{\beta\pi}{2})$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ , whose coefficients  $\psi(k)$  are such that product  $\psi(n)n^{1-\frac{1}{s}}$ ,  $1 < s \leq \infty$ , can't tend to nought faster than every power function and besides, if  $1 < s < \infty$ , then  $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2} < \infty$  and if  $s = \infty$ , then  $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$ .

Нехай  $L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , — простір  $2\pi$ -періодичних сумовних в  $p$ -му степені на  $[0, 2\pi)$  функцій  $f(t)$ , в якому норма задана формулою

$$\|f\|_p := \left( \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}};$$

$L_\infty$  — простір  $2\pi$ -періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій  $f(t)$  з нормою

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_t |f(t)|.$$

Позначимо через  $L_{\beta,1}^\psi$  множину функцій  $f \in L_1$ , які майже скрізь зображуються за допомогою згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_\beta(x-t) \varphi(t) dt, \quad \varphi \in B_1^0, \quad \varphi \perp 1, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

де

$$B_1^0 = \{\varphi : \|\varphi\|_1 \leq 1\},$$

з сумовним ядром  $\Psi_\beta$  вигляду

$$\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad \psi(k) > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Якщо  $f$  і  $\varphi$  пов'язані рівністю (1), то функцію  $\varphi$  в цій рівності називають  $(\psi, \beta)$ -похідною функції  $f$  і позначають  $f_\beta^\psi$  (див., наприклад, [1, с. 132]).

Якщо послідовності  $\psi(k)$  монотонно незростають і виконується умова

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} < \infty, \quad 1 < s < \infty, \quad (2)$$

тоді згідно з лемою 12.6.6 монографії [2, с. 193]  $\Psi_\beta \in L_s$ ,  $1 < s < \infty$ , а отже в силу твердження 1.5.5 монографії [3, с. 43]  $L_{\beta,1}^\psi \subset L_s$ ,  $1 < s < \infty$ .

Якщо ж  $\psi(k)$  така, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty,$$

то  $\Psi_\beta \in L_\infty$ , і має місце включення  $L_{\beta,1}^\psi \subset L_\infty$  (див., наприклад, твердження 1.5.5 монографії [3, с. 43]).

При  $\psi(k) = k^{-r}$ ,  $r > 0$  класи  $L_{\beta,1}^\psi$  є відомими класами Вейля–Надя  $W_{\beta,1}^r$ , для яких при  $r > 1 - \frac{1}{s}$  має місце включення  $W_{\beta,1}^r \subset L_s$ ,  $1 < s \leq \infty$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Будемо вважати, що послідовності  $\psi(k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , що визначають класи  $L_{\beta,1}^\psi$ , є звуженнями на множину натуральних чисел деяких додатних, неперервних, опуклих донизу функцій  $\psi(t)$  неперервного аргументу  $t \geq 1$ , що задовольняють умову  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$ . Множину всіх таких функцій  $\psi(t)$  позначатимемо через  $\mathfrak{M}$ .

Для класифікації функцій  $\psi$  із  $\mathfrak{M}$  за їх швидкістю спадання до нуля важливу роль відіграє характеристика

$$\alpha(\psi; t) := \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}, \quad \psi'(t) := \psi'(t+0). \quad (3)$$

З її допомогою з множини  $\mathfrak{M}$  виділяють наступні підмножини (див., наприклад, [1, с. 161]):

$$\mathfrak{M}_0 := \{\psi \in \mathfrak{M} : \exists K > 0 \quad \forall t \geq 1 \quad 0 < K \leq \alpha(\psi; t)\},$$

$$\mathfrak{M}_C := \{\psi \in \mathfrak{M} : \exists K_1, K_2 > 0 \quad \forall t \geq 1 \quad K_1 \leq \alpha(\psi; t) \leq K_2 < \infty\},$$

$$\mathfrak{M}_\infty^+ := \{\psi \in \mathfrak{M} : \alpha(\psi; t) \downarrow 0\}.$$

Розглянемо величини вигляду

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_s = \sup_{f \in L_{\beta,1}^\psi} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f; \cdot)\|_s, \quad 1 \leq s \leq \infty,$$

де  $S_{n-1}(f; \cdot)$  — частинні суми Фур'є порядку  $n - 1$ , а також найкращі наближення класів  $L_{\beta,1}^\psi$  тригонометричними поліномами порядку не вищого за  $n - 1$ , тобто величини вигляду

$$E_n(L_{\beta,1}^\psi)_s = \sup_{f \in L_{\beta,1}^\psi} \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_s, \quad 1 \leq s \leq \infty,$$

де  $\mathcal{T}_{2n-1}$  — підпростір усіх тригонометричних поліномів  $t_{n-1}$  порядку не вищого за  $n - 1$ .

В роботі розв'язується задача про знаходження точних порядкових оцінок для величин  $\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_s$  і  $E_n(L_{\beta,1}^\psi)_s$ ,  $1 < s \leq \infty$  при певних обмеженнях на функцію  $\psi$ .

Для класів Вейля–Надя  $W_{\beta,1}^r$  порядкові оцінки величин  $\mathcal{E}_n(W_{\beta,1}^r)_s$  і  $E_n(W_{\beta,1}^r)_s$  при довільних  $r > \frac{1}{s'}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq s \leq \infty$ ,  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$  відомі (див., наприклад, [4]) і мають вигляд

$$E_n(W_{\beta,1}^r)_s \asymp n^{-r+\frac{1}{s'}}, \quad 1 \leq s \leq \infty, \quad r > \frac{1}{s'}, \quad (4)$$

$$\mathcal{E}_n(W_{\beta,1}^r)_1 \asymp n^{-r} \ln n, \quad r > 0, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

$$\mathcal{E}_n(W_{\beta,1}^r)_s \asymp n^{-r+\frac{1}{s'}}, \quad 1 < s \leq \infty, \quad r > \frac{1}{s'}. \quad (5)$$

В [5] у випадку, коли  $\frac{1}{\psi(t)}$  опукла і  $\psi \in B \cap \Theta_{s'}$ ,  $1 \leq s' < \infty$ , де  $\Theta_{s'}$  — множина незростаючих функцій  $\psi(t)$ , для яких існує стала  $\alpha > \frac{1}{s'}$  така, що функція  $t^\alpha \psi(t)$  майже спадає (тобто знайдеться додатна стала  $K$  для якої при будь-яких  $t_1 > t_2 \geq 1$   $t_1^\alpha \psi(t_1) \leq K t_2^\alpha \psi(t_2)$ ), а  $B$  — множина незростаючих при  $t \geq 1$  додатних функцій  $\psi(t)$ , для кожної з яких можна вказати додатну сталу  $K$  таку, що  $\frac{\psi(t)}{\psi(2t)} \leq K$ ,  $t \geq 1$ , показано, що існують додатні величини  $K^{(1)}$ ,  $K^{(2)}$ , залежні лише від  $\psi$  і  $s$  такі, що для довільних  $1 < s \leq \infty$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  і  $n \in \mathbb{N}$

$$K^{(2)} \psi(n) n^{\frac{1}{s'}} \leq E_n(L_{\beta,1}^\psi)_s \leq \mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_s \leq K^{(1)} \psi(n) n^{\frac{1}{s'}}. \quad (6)$$

У випадку  $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$  порядкові оцінки величин  $\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_s$  і  $E_n(L_{\beta,1}^\psi)_s$ ,  $1 \leq s \leq \infty$ , були знайдені в роботах [6]–[7].

В роботі [8] за умови  $\sum_{k=1}^\infty \psi^2(k) < \infty$  для всіх  $\beta \in \mathbb{R}$  і  $n \in \mathbb{N}$  знайдено точні значення величин  $\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_2$ , а саме встановлено рівність

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \sum_{k=n}^\infty \psi^2(k) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

У випадку  $\psi \in \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty^+$  відомі асимптотичні рівності для величин  $\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_1$  при  $n \rightarrow \infty$  (див., наприклад, [6, с. 153]).

При  $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$  і  $\beta \in \mathbb{R}$  в [9] встановлено асимптотичні рівності і для найкращих наближень  $E_n(L_{\beta,1}^\psi)_1$ . Крім того, в [10]–[11] отримано точні значення величин  $E_n(L_{\beta,1}^\psi)_1$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ , за деяких умов на послідовність  $\psi(k)$ .

Метою даної роботи є знаходження точних порядкових оцінок величин  $\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_s$  і  $E_n(L_{\beta,1}^\psi)_s$  у випадку, коли  $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2} < \infty$ , а функція

$$g_{s'}(t) := \psi(t)t^{\frac{1}{s'}}, \quad 1 < s < \infty, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1, \quad (7)$$

належить до множини  $\mathfrak{M}_0$ . Крім того, в роботі знайдено точні порядкові оцінки величин  $\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty$  і  $E_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty$  у випадку, коли  $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$ , а функція  $g(t) := \psi(t)t$  належить до множини  $\mathfrak{M}_0$ . При цьому константи в отриманих оцінках будуть виражені через параметри задачі в явному вигляді.

**Теорема 1.** *Нехай  $\psi(t)t^{\frac{1}{s'}} \in \mathfrak{M}_0$  і*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2} < \infty, \quad (8)$$

*$1 < s < \infty$ ,  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ . Тоді для довільних  $n \in \mathbb{N}$  і  $\beta \in \mathbb{R}$  мають місце співвідношення*

$$K_{\psi,s}^{(1)} \left( \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2} \right)^{\frac{1}{s}} \leq E_n(L_{\beta,1}^\psi)_s \leq \mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_s \leq K_{\psi,s}^{(2)} \left( \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2} \right)^{\frac{1}{s}}, \quad (9)$$

де  $K_{\psi,s}^{(1)}$  і  $K_{\psi,s}^{(2)}$  — додатні величини що залежать лише від  $\psi$  і  $s$ .

**Доведення теореми 1.** Згідно з інтегральним зображенням (1), для довільної функції  $f \in L_{\beta,1}^\psi$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ , майже для всіх  $x \in \mathbb{R}$  справедлива рівність

$$f(x) - S_{n-1}(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{\beta,n}(x-t) f_\beta^\psi(t) dt, \quad f_\beta^\psi \in B_1^0, \quad f_\beta^\psi \perp 1, \quad (10)$$

де

$$\Psi_{\beta,n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

При цьому в силу включення  $g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$  і умови (8),  $\Psi_{\beta,n} \in L_s$ ,  $1 < s < \infty$ ,  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ . Скориставшись нерівністю (1.5.28) роботи [3, с. 43], одержимо, що для довільних  $1 < s < \infty$

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_s \leq \frac{1}{\pi} \sup_{f \in L_{\beta,1}^\psi} \|\Psi_{\beta,n}(\cdot)\|_s \|f_\beta^\psi(\cdot)\|_1 \leq \frac{1}{\pi} \|\Psi_{\beta,n}(\cdot)\|_s. \quad (12)$$

В [12] (див. формули (32) і (35)) при виконанні умови (8), і умов  $g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$ ,  $1 < s < \infty$ ,  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ , де  $g_{s'}$  означається формулою (7), було доведено нерівність

$$\frac{1}{\pi} \|\Psi_{\beta,n}(\cdot)\|_s \leq \frac{1}{\pi} \xi(s) \left(1 + \frac{s}{\underline{Q}_n(g_{s'})}\right)^{\frac{1}{s}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2}\right)^{\frac{1}{s}}, \quad (13)$$

в якій

$$\xi(s) := \max \left\{ 4 \left( \frac{\pi}{s-1} \right)^{\frac{1}{s}}, \quad 14(8\pi)^{\frac{1}{s}s} \right\}, \quad (14)$$

$$\underline{\alpha}_n(\psi) := \inf_{t \geq n} \alpha(\psi; t), \quad \psi \in \mathfrak{M}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (15)$$

а  $\alpha(\psi; t)$  означається формулою (3).

З нерівностей (12) і (13) отримуємо оцінку

$$\begin{aligned} E_n(L_{\beta,1}^\psi)_s &\leq \mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_s \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \xi(s) \left( \frac{\underline{\alpha}_n(g_{s'}) + s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})} \right)^{\frac{1}{s}} \left( \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} \right)^{\frac{1}{s}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \xi(s) \left( \frac{\underline{\alpha}_1(g_{s'}) + s}{\underline{\alpha}_1(g_{s'})} \right)^{\frac{1}{s}} \left( \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} \right)^{\frac{1}{s}}, \quad 1 < s < \infty, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Знайдемо оцінку знизу для  $E_n(L_{\beta,1}^\psi)_s$ ,  $1 < s < \infty$ . З цією метою розглянемо згортку

$$f_m(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_m(\tau) \Psi_\beta(t - \tau) d\tau, \quad (17)$$

де

$$\varphi_m(t) := \frac{1}{4\pi} \left( V_m(t) - \frac{1}{2} \right), \quad (18)$$

а  $V_m(t)$  — ядра Валле Пуссена вигляду (див. формулу (1.3.15) роботи [1, с. 31])

$$V_m(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \cos kt + 2 \sum_{k=m+1}^{2m-1} \left( 1 - \frac{k}{2m} \right) \cos kt, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

Покажемо, що  $\|\varphi_m(t)\|_1 \leq 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Відомо, що

$$V_m(t) = 2F_{2m-1}(t) - F_{m-1}(t), \quad (20)$$

(див., наприклад, [4, с. 28]), де  $F_k(t)$  — ядра Фейєра порядку  $k$

$$F_k(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{k+1} \sum_{\nu=0}^k \left( \sum_{j=1}^{\nu} \cos jt \right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Оскільки (див., наприклад, [13, с. 148])

$$\|F_k(t)\|_1 = \pi, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (21)$$

то з (20) і (21) отримуємо

$$\|V_m(t)\|_1 \leq 3\pi, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (22)$$

Враховуючи (22), одержуємо

$$\|\varphi_m(t)\|_1 = \frac{1}{4\pi} \|V_m(t) - \frac{1}{2}\|_1 \leq \frac{1}{4\pi} (\|V_m(t)\|_1 + \pi) \leq 1.$$

Оскільки  $\|\varphi_m(t)\|_1 \leq 1$  і  $\varphi \perp 1$ , то  $f_m \in L_{\beta,1}^\psi$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Використовуючи співвідношення (17)–(19), а також твердження (3.7.1) з [1, с. 134] отримаємо рівність

$$f_m(t) = \frac{1}{4\pi} \left( \sum_{k=1}^m \psi(k) \cos \left( kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) + 2 \sum_{k=m+1}^{2m-1} \left( 1 - \frac{k}{2m} \right) \psi(k) \cos \left( kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) \right). \quad (23)$$

Покладемо

$$\Phi_s(x) := \int_x^\infty \psi^s(t) t^{s-2} dt, \quad 1 < s < \infty,$$

і

$$B(n) = B(\psi; s; n) := \left[ \Phi_s^{-1} \left( \frac{1}{2n} \Phi_s(n) \right) \right] + 1, \quad (24)$$

де  $[\alpha]$  — ціла частина дійсного числа  $\alpha$ , а  $\Phi_s^{-1}$  — функція обернена до  $\Phi_s$ .

Розглянемо інтеграл

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} (f_{B(n)}(t) - t_{n-1}(t)) \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s-1}(k) k^{s-2} \cos \left( kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) dt, \quad (25)$$

де  $t_{n-1}(t) \in \mathcal{T}_{2n-1}$ , а функція  $f_{B(n)}(t)$  означається формулою (23) при  $m = B(n)$ .

Використавши нерівність Гельдера (див., наприклад, [1, с. 137]), запишемо

$$I_1 \leq \|f_{B(n)}(t) - t_{n-1}(t)\|_s \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s-1}(k) k^{s-2} \cos \left( kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) \right\|_{s'}. \quad (26)$$

Для оцінки норми  $\left\| \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s-1}(k) k^{s-2} \cos \left( kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) \right\|_{s'}$  буде корисним наступне твердження роботи [12].

**Лема 1.** *Нехай  $1 < p < \infty$  і  $\{a_k\}_{k=1}^\infty$  — монотонно незростаюча послідовність додатних чисел така, що  $\sum_{k=1}^\infty a_k^p k^{p-2} < \infty$ . Тоді для  $L_p$ -норми функції*

$$h_{\gamma,n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \cos(kx + \gamma), \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

має місце нерівність

$$\|h_{\gamma,n}(x)\|_p \leq \xi(p) \left( \sum_{k=n}^{\infty} a_k^p k^{p-2} + a_n^p n^{p-1} \right)^{\frac{1}{p}},$$

де величина  $\xi(p)$  означається формулою (14).

Оскільки, згідно з умовою теореми,  $g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$ , то функція  $\psi^{s-1}(t) t^{s-2} = g_{s'}^{s-1}(t) t^{-\frac{1}{s}}$  монотонно спадає до нуля. Тому, поклавши в умовах леми 1  $a_k = \psi^{s-1}(k) k^{s-2}$ ,  $\gamma = -\frac{\beta\pi}{2}$ ,  $p = s'$ , запишемо

$$\left\| \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s-1}(k) k^{s-2} \cos \left( kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) \right\|_{s'} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \xi(s') \left( \sum_{k=n}^{\infty} (\psi^{s-1}(k) k^{s-2})^{s'} k^{s'-2} + (\psi^{s-1}(n) n^{s-2})^{s'} n^{s'-1} \right)^{\frac{1}{s'}} = \\
&= \xi(s') \left( \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} + \psi^s(n) n^{s-1} \right)^{\frac{1}{s'}}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Далі використаємо наступне твердження роботи [12].

**Лема 2.** *Нехай  $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} < \infty$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тоді, якщо  $g_p \in \mathfrak{M}_0$ , де  $g_p(t) = \psi(t) t^{\frac{1}{p}}$ , то виконується нерівність*

$$\psi^{p'}(n) n^{p'-1} \leq \frac{p'}{\underline{\alpha}_n(g_p)} \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2}, \tag{28}$$

де величина  $\underline{\alpha}_n(g_p)$  означається формулою (15).

Застосувавши лему 2 при  $p = s'$ , з (27) отримаємо

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s-1}(k) k^{s-2} \cos \left( kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) \right\|_{s'} \leq \\
&\leq \xi(s') \left( 1 + \frac{s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})} \right)^{\frac{1}{s'}} \left( \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} \right)^{\frac{1}{s'}}.
\end{aligned} \tag{29}$$

Зі співвідношень (26) і (29) отримуємо оцінку

$$\begin{aligned}
&\|f_{B(n)}(t) - t_{n-1}(t)\|_s \geq \\
&\geq \frac{1}{\xi(s')} \left( \frac{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}{\underline{\alpha}_n(g_{s'}) + s} \right)^{\frac{1}{s'}} \left( \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} \right)^{-\frac{1}{s'}} I_1.
\end{aligned} \tag{30}$$

Оскільки для будь-якого  $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} t_{n-1}(t) \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s-1}(k) k^{s-2} \cos \left( kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) dt = 0, \tag{31}$$

то в силу (25)

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} f_{B(n)}(t) \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s-1}(k) k^{s-2} \cos \left( kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) dt. \tag{32}$$

Очевидно, що

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt + \theta) \cos(mt + \theta) dt = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \pi, & k = m, \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{N}, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{33}$$

Використовуючи (33) при  $\theta = -\frac{\beta\pi}{2}$  і (23) при  $m = B(n)$ , з (32) одержуємо

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k=1}^{B(n)} \psi(k) \cos \left( kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) + \right. \\
&\quad + 2 \sum_{k=B(n)+1}^{2B(n)-1} \left( 1 - \frac{k}{2B(n)} \right) \psi(k) \cos \left( kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) \Big) \times \\
&\quad \times \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s-1}(k) k^{s-2} \cos \left( kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) dt = \\
&= \frac{1}{4} \left( \sum_{k=n}^{B(n)} \psi^s(k) k^{s-2} + 2 \sum_{k=B(n)+1}^{2B(n)-1} \left( 1 - \frac{k}{2B(n)} \right) \psi^s(k) k^{s-2} \right) > \\
&> \frac{1}{4} \sum_{k=n}^{B(n)} \psi^s(k) k^{s-2} = \frac{1}{4} \left( \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} - \sum_{k=B(n)+1}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} \right). \tag{34}
\end{aligned}$$

Для оцінки знизу інтеграла  $I_1$  залишилось оцінити зверху суму  $\sum_{k=B(n)+1}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2}$ . З (24) випливає

$$\begin{aligned}
\sum_{k=B(n)+1}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} &\leq \int_{B(n)}^{\infty} \psi^s(t) t^{s-2} dt = \Phi_s(B(n)) < \\
&< \frac{1}{2n} \Phi_s(n) \leq \frac{1}{2n} \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2}. \tag{35}
\end{aligned}$$

З нерівностей (30), (34) і (35) для довільного  $t_{n-1}(t) \in \mathcal{T}_{2n-1}$  отримаємо оцінку

$$\begin{aligned}
&\|f_{B(n)}(t) - t_{n-1}(t)\|_s \geq \\
&\geq \frac{1}{\xi(s')} \left( \frac{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}{\underline{\alpha}_n(g_{s'}) + s} \right)^{\frac{1}{s'}} \left( \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} \right)^{-\frac{1}{s'}} \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{2n} \right) \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} \geq \\
&\geq \frac{1}{8\xi(s')} \left( \frac{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}{\underline{\alpha}_n(g_{s'}) + s} \right)^{\frac{1}{s'}} \left( \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} \right)^{\frac{1}{s}} \geq \\
&\geq \frac{1}{8\xi(s')} \left( \frac{\underline{\alpha}_1(g_{s'})}{\underline{\alpha}_1(g_{s'}) + s} \right)^{\frac{1}{s'}} \left( \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} \right)^{\frac{1}{s}}. \tag{36}
\end{aligned}$$

Об'єднуючи (16) і (36) отримуємо співвідношення (9). Теорему 1 доведено.

Прикладами функцій  $\psi$ , які задовольняють умови теореми 1 є функції:

$$1) \psi(t) = t^{-r}, \quad r > \frac{1}{s'};$$



$$2)\psi(t) = t^{-\frac{1}{s'}} \ln^{-\gamma}(t+K), \gamma > \frac{1}{s}, K > 0;$$

$$3)\psi(t) = t^{-\frac{1}{s'}} (\ln(t+K_1))^{-\frac{1}{s}} (\ln \ln(t+K_2))^{-\gamma}, \gamma > \frac{1}{s}, K_2 \geq e-1, K_1 > 0, \quad (37)$$

та інші.

**Зауваження.** В ході доведення теореми 1 за виконання її умов було показано, що для довільного  $n \in \mathbb{N}$  виконується більш точна, ніж (9), оцінка:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\xi(s')}\left(\frac{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})+s}\right)^{\frac{1}{s'}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\right)^{\frac{1}{s}} &\leq E_n(L_{\beta,1}^\psi)_s \leq \mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_s \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi}\xi(s)\left(\frac{\underline{\alpha}_n(g_{s'})+s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}\right)^{\frac{1}{s}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2}\right)^{\frac{1}{s}}, \end{aligned} \quad (38)$$

де  $1 < s < \infty$ ,  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ , а  $\xi(s')$  і  $\underline{\alpha}_n(g_{s'})$  — додатні величини, що означаються за допомогою формул (14) і (15) відповідно.

З нерівностей (38) випливає наступне твердження.

**Наслідок 1.** Нехай  $r > \frac{1}{s'}$ ,  $1 < s < \infty$ ,  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ . Тоді для довільних  $\beta \in \mathbb{R}$  і  $n \in \mathbb{N}$  виконується оцінка:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\xi(s')}\left(\frac{s'}{s'+s(rs'-1)}\right)^{\frac{1}{s'}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^{s(r-1)+2}}\right)^{\frac{1}{s}} &\leq E_n(W_{\beta,1}^r)_s \leq \\ &\leq \mathcal{E}_n(W_{\beta,1}^r)_s \leq \frac{1}{\pi}\xi(s)\left(\frac{s'+s(rs'-1)}{s'}\right)^{\frac{1}{s}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^{s(r-1)+2}}\right)^{\frac{1}{s}}, \end{aligned} \quad (39)$$

де  $\xi(s)$  — додатня величина, що означається за допомогою формули (14).

Оскільки

$$\frac{1}{\alpha-1}n^{1-\alpha} \leq \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha} \leq \left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)n^{1-\alpha}, \quad \alpha > 1,$$

то з (39) одержуємо співвідношення

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\xi(s')}\left(\frac{s'}{s'+s(rs'-1)}\right)^{\frac{1}{s'}}\left(\frac{1}{s(r-1)+1}\right)^{\frac{1}{s}}n^{-r+\frac{1}{s'}} &\leq E_n(W_{\beta,1}^r)_s \leq \\ &\leq \mathcal{E}_n(W_{\beta,1}^r)_s \leq \frac{1}{\pi}\xi(s)\left(\frac{s'+s(rs'-1)}{s'}\right)^{\frac{1}{s}}\left(\frac{s(r-1)+2}{s(r-1)+1}\right)^{\frac{1}{s}}n^{-r+\frac{1}{s'}}. \end{aligned} \quad (40)$$

Нерівності (40) уточнюють порядкові оцінки (4) і (5).

В [12] було показано, що при виконанні умов  $\sum_{k=1}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2} < \infty$ ,  $\psi(t)t^{\frac{1}{s'}} \in \mathfrak{M}_C$ ,  $1 < s < \infty$ ,  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$  має місце порядкова оцінка

$$\sum_{k=n}^{\infty}\psi^s(k)k^{s-2} \asymp \psi^s(n)n^{s-1}, \quad (41)$$

де під записом  $A(n) \asymp B(n)$ , як зазвичай прийнято, будемо розуміти, що для додатних послідовностей  $A(n)$  і  $B(n)$  існують сталі  $K_1 > 0$  і  $K_2 > 0$  такі, що  $K_1 B(n) \leq A(n) \leq K_2 B(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Отже, з (9) і (41) випливає наступне твердження.

**Наслідок 2.** *Нехай  $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} < \infty$ ,  $1 < s < \infty$ ,  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  і  $n \in \mathbb{N}$ . Тоді, якщо для функції  $g_{s'}$  вигляду (7) виконується включення  $g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$ , то*

$$E_n(L_{\beta,1}^\psi)_s \asymp \mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_s \asymp \left( \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} \right)^{\frac{1}{s}}, \quad (42)$$

а якщо ж  $g_{s'} \in \mathfrak{M}_C$ , то

$$E_n(L_{\beta,1}^\psi)_s \asymp \mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_s \asymp \psi(n) n^{\frac{1}{s'}}. \quad (43)$$

Порядкові оцінки (43) встановлені раніше в роботі [5].

Зауважимо, що у випадку, коли

$$g_{s'} \in \mathfrak{M}_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(g_{s'}; t) = \infty \quad (44)$$

виконується оцінка

$$\psi(n) n^{\frac{1}{s'}} = o\left( \left( \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} \right)^{\frac{1}{s}} \right), \quad n \rightarrow \infty,$$

тобто порядкові рівності (43) місця не мають. Зокрема умова (44) виконується для функцій  $\psi(t)$  вигляду (37). Наведемо наслідок з теореми 1 для згаданих функцій  $\psi$ .

**Наслідок 3.** *Нехай  $\psi(t) = t^{-\frac{1}{s'}} \ln^{-\frac{1}{s}}(t + K_1) (\ln \ln(t + K_2))^{-\gamma}$ ,  $\gamma > \frac{1}{s}$ ,  $K_2 \geq e - 1$ ,  $K_1 > 0$ ,  $1 < s < \infty$ ,  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  і  $n \geq 3$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тоді*

$$E_n(L_{\beta,1}^\psi)_s \asymp \mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_s \asymp (\ln \ln n)^{\frac{1}{s}-\gamma} \asymp \psi(n) n^{\frac{1}{s'}} (\ln n)^{\frac{1}{s}} (\ln \ln n)^{\frac{1}{s}}.$$

**Доведення наслідку 3.** Як зазначалось вище, функції  $\psi(t)$  вигляду (37) задовольняють умови теореми 1. Тому, враховуючи співвідношення (42) роботи [12], неважко переконатись в справедливості співвідношення

$$\begin{aligned} \int_n^{\infty} \psi^s(t) t^{s-2} dt &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} \leq \psi^s(n) n^{s-2} + \int_n^{\infty} \psi^s(t) t^{s-2} dt \leq \\ &\leq \left( \frac{s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})} \cdot \frac{1}{n} + 1 \right) \int_n^{\infty} \psi^s(t) t^{s-2} dt. \end{aligned} \quad (45)$$

З (9), (45) і того, що  $\underline{\alpha}_n(g_{s'}) > K > 0$  випливає, що при  $n \geq 3$

$$E_n(L_{\beta,1}^\psi)_s \asymp \mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_s \asymp \left( \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} \right)^{\frac{1}{s}} \asymp$$

$$\begin{aligned}
&\asymp \left( \int_n^\infty \psi^s(t) t^{s-2} dt \right)^{\frac{1}{s}} = \left( \int_n^\infty \frac{dt}{t \ln(t + K_1) (\ln \ln(t + K_2))^{\gamma s}} \right)^{\frac{1}{s}} \asymp \\
&\asymp \left( \int_n^\infty \frac{dt}{t \ln t (\ln \ln t)^{\gamma s}} \right)^{\frac{1}{s}} \asymp (\ln \ln n)^{\frac{1}{s} - \gamma} \asymp \\
&\asymp \psi(n) n^{\frac{1}{s\gamma}} (\ln n)^{\frac{1}{s}} (\ln \ln n)^{\frac{1}{s}}, \quad n \geq 3.
\end{aligned}$$

Наслідок 3 доведено.

**Теорема 2.** Нехай  $\psi \in \mathfrak{M}$ ,  $\sum_{k=1}^\infty \psi(k) < \infty$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  і  $\cos \frac{\beta\pi}{2} \neq 0$ . Тоді для довільних  $n \in \mathbb{N}$  мають місце нерівності

$$\frac{1}{4\pi} \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \sum_{k=n}^\infty \psi(k) \leq \mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \leq \frac{1}{\pi} \sum_{k=n}^\infty \psi(k). \quad (46)$$

**Доведення теореми 2.** Знайдемо оцінку зверху величини  $\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty$ . З урахуванням формули (10) і нерівності (1.5.28) роботи [3, с. 43]

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \leq \frac{1}{\pi} \|\Psi_{\beta,n}(\cdot)\|_\infty. \quad (47)$$

Оскільки

$$\|\Psi_{\beta,n}(t)\|_\infty = \left\| \sum_{k=n}^\infty \psi(k) \cos \left( kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) \right\|_\infty \leq \sum_{k=n}^\infty \psi(k),$$

то з (47) одержуємо

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \leq \frac{1}{\pi} \sum_{k=n}^\infty \psi(k), \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (48)$$

Знайдемо оцінку знизу величини  $\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty$ . Покладемо

$$\Psi(x) := \int_x^\infty \psi(t) dt$$

і

$$D(l; n) = D(\psi; l; n) := \left[ \Psi^{-1} \left( \frac{1}{2l} \Psi(n) \right) \right] + 2n, \quad l, n \in \mathbb{N}. \quad (49)$$

Розглянемо функцію  $f_{D(l;n)}(t)$ , що означається формулою (23) при  $m = D(l; n)$ , тобто

$$\begin{aligned}
f_{D(l;n)}(t) &= \frac{1}{4\pi} \left( \sum_{k=1}^{D(l;n)} \psi(k) \cos \left( kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2 \sum_{k=D(l;n)+1}^{2D(l;n)-1} \left( 1 - \frac{k}{2D(l;n)} \right) \psi(k) \cos \left( kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) \right), \quad (50)
\end{aligned}$$

Як було показано при доведенні теореми 1,  $f_{D(l;n)} \in L_{\beta,1}^\psi$ . Беручи до уваги рівність (50) та враховуючи умови теореми 2, отримуємо, що при довільних  $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty &\geq |f_{D(l;n)}(0) - S_{n-1}(f_{D(l;n)}; 0)| = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \left( \sum_{k=n}^{D(l;n)} \psi(k) + 2 \sum_{k=D(l;n)+1}^{2D(l;n)-1} \left(1 - \frac{k}{2D(l;n)}\right) \psi(k) \right) > \\ &> \frac{1}{4\pi} \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \sum_{k=n}^{D(l;n)} \psi(k) = \frac{1}{4\pi} \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) - \sum_{k=D(l;n)+1}^{\infty} \psi(k) \right). \end{aligned} \quad (51)$$

З (49) випливає, що для довільних  $l \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=D(l;n)+1}^{\infty} \psi(k) \leq \int_{D(l;n)}^{\infty} \psi(t) dt = \Psi(D(l;n)) < \frac{1}{2l} \Psi(n) \leq \frac{1}{2l} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k). \quad (52)$$

Тому

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty > \frac{1}{4\pi} \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \left(1 - \frac{1}{2l}\right) \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k), \quad l, n \in \mathbb{N} \quad (53)$$

Перейшовши до границі в нерівності (53) при  $l \rightarrow \infty$ , одержимо

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty > \frac{1}{4\pi} \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k). \quad (54)$$

На підставі (48) і (54) отримуємо оцінку (46). Теорему 2 доведено.

**Теорема 3.** Нехай  $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$ ,  $\psi(t) = g(t)t^{-1}$ ,  $g \in \mathfrak{M}_0$  і

$$\underline{\alpha}_1(g) = \inf_{t \geq 1} \alpha(g; t) > 1. \quad (55)$$

Тоді для довільних  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\cos \frac{\beta\pi}{2} \neq 0$  і  $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{48\pi} \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \left(1 - \frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)}\right) \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \leq E_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \leq \mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \leq \frac{1}{\pi} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k). \quad (56)$$

**Доведення теореми 3.** В силу теореми 2 при умові  $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$  справедлива оцінка

$$E_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \leq \mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \leq \frac{1}{\pi} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k), \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (57)$$

Знайдемо оцінку знизу величини  $E_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty$ . Розглянемо інтеграл

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f_{D(l;n)}(t) - t_{n-1}(t))(V_{D(l;n)}(t) - V_{n-1}(t)) dt, \quad (58)$$

де  $t_{n-1}(t) \in \mathcal{T}_{2n-1}$ , а функція  $f_{D(l;n)}(t)$  та величина  $D(l;n)$  означаються формулами (50) і (49) відповідно.

Використавши формулу (19), запишемо

$$V_{D(l;n)}(t) - V_{n-1}(t) = \sum_{k=n}^{D(l;n)} \cos kt + 2 \sum_{k=D(l;n)+1}^{2D(l;n)-1} \left(1 - \frac{k}{2D(l;n)}\right) \cos kt - 2 \sum_{k=n}^{2n-3} \left(1 - \frac{k}{2n-2}\right) \cos kt. \quad (59)$$

З (59) випливає, що для довільного  $t_{n-1}(t) \in \mathcal{T}_{2n-1}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} t_{n-1}(t) (V_{D(l;n)}(t) - V_{n-1}(t)) dt = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (60)$$

Оскільки

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos \left(mt - \frac{\beta\pi}{2}\right) dt = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \pi \cos \frac{\beta\pi}{2}, & k = m, \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{N}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad (61)$$

то беручи до уваги (50), (59) і (60), одержуємо

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f_{D(l;n)}(t) (V_{D(l;n)}(t) - V_{n-1}(t)) dt \right| = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k=1}^{D(l;n)} \psi(k) \cos \left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) + 2 \sum_{k=D(l;n)+1}^{2D(l;n)-1} \left(1 - \frac{k}{2D(l;n)}\right) \psi(k) \cos \left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right) \times \right. \\ &\quad \times \left. \left( \sum_{k=n}^{D(l;n)} \cos kt + 2 \sum_{k=D(l;n)+1}^{2D(l;n)-1} \left(1 - \frac{k}{2D(l;n)}\right) \cos kt - 2 \sum_{k=n}^{2n-3} \left(1 - \frac{k}{2n-2}\right) \cos kt \right) dt \right| = \\ &= \frac{1}{4} \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \left( \sum_{k=n}^{D(l;n)} \psi(k) - 2 \sum_{k=n}^{2n-3} \left(1 - \frac{k}{2n-2}\right) \psi(k) + 4 \sum_{k=D(l;n)+1}^{2D(l;n)-1} \left(1 - \frac{k}{2D(l;n)}\right)^2 \psi(k) \right) > \\ &> \frac{1}{4} \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \left( \sum_{k=n}^{D(l;n)} \psi(k) - 2 \sum_{k=n}^{2n-3} \left(1 - \frac{k}{2n-2}\right) \psi(k) \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \left( \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) - \sum_{k=D(l;n)+1}^{\infty} \psi(k) - 2 \sum_{k=n}^{2n-3} \left(1 - \frac{k}{2n-2}\right) \psi(k) \right). \quad (62) \end{aligned}$$

Враховуючи монотонність функції  $\psi(t)$ , отримуємо

$$2 \sum_{k=n}^{2n-3} \left(1 - \frac{k}{2n-2}\right) \psi(k) \leq \psi(n) \frac{1}{n-1} \sum_{k=n}^{2n-3} (2n-2-k) =$$

$$= \frac{1}{2}\psi(n)(n-2) < \frac{1}{2}\psi(n)n. \quad (63)$$

Для будь-якої функції  $\psi \in \mathfrak{M}$  через  $\bar{\alpha}_n(\psi)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , позначимо величину

$$\bar{\alpha}_n(\psi) := \sup_{t \geq n} \alpha(\psi; t), \quad (64)$$

де характеристика  $\alpha(\psi; t)$  означається формулою (3). В прийнятих позначеннях має місце наступне твердження.

**Лема 3.** Нехай  $\psi(t) = g(t)t^{-1}$ ,  $g \in \mathfrak{M}_0$  і  $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$ . Тоді для довільних  $n \in \mathbb{N}$

$$\psi(n)n \leq \frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k). \quad (65)$$

Якщо ж крім того  $g \in \mathfrak{M}_C$ , то

$$\frac{1}{\bar{\alpha}_n(g)} \cdot \frac{n\underline{\alpha}_n(g)}{1 + n\underline{\alpha}_n(g)} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \leq \psi(n)n \leq \frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k). \quad (66)$$

**Доведення леми 3.** Нехай  $g \in \mathfrak{M}_0$ . Покажемо справедливість нерівності (65). Очевидно,

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \geq \int_n^{\infty} \psi(t) dt. \quad (67)$$

Оскільки функція  $\psi(t)t$  монотонно спадає до нуля, то проінтегрувавши частинами інтеграл  $\int_n^{\infty} \psi(t) dt$ , отримаємо

$$\int_n^{\infty} \psi(t) dt = -\psi(n)n - \int_n^{\infty} \psi'(t)t dt = -\psi(n)n + \int_n^{\infty} \psi(t) \frac{1}{\alpha(\psi; t)} dt. \quad (68)$$

З рівності (68) випливає

$$\psi(n)n = \int_n^{\infty} \psi(t) \frac{1}{\alpha(\psi; t)} dt - \int_n^{\infty} \psi(t) dt. \quad (69)$$

Покажемо, що

$$\frac{1}{\alpha(\psi; t)} = 1 + \frac{1}{\alpha(g; t)}, \quad t \geq 1. \quad (70)$$

Дійсно, оскільки  $\psi(t) = g(t)t^{-1}$ , то

$$\frac{1}{\alpha(\psi; t)} = \frac{t|\psi'(t)|}{\psi(t)} = \frac{t^{-1}g(t) + |g'(t)|}{g(t)t^{-1}} =$$

$$= 1 + \frac{t|g'(t)|}{g(t)} = 1 + \frac{1}{\alpha(g; t)}.$$

Підставивши (70) в (69), отримаємо рівність

$$\psi(n)n = \int_n^\infty \psi(t) \left(1 + \frac{1}{\alpha(g; t)}\right) dt - \int_n^\infty \psi(t) dt = \int_n^\infty \psi(t) \frac{1}{\alpha(g; t)} dt. \quad (71)$$

З (67) і (71) випливає співвідношення

$$\psi(n)n \leq \frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)} \int_n^\infty \psi(t) dt \leq \frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)} \sum_{k=n}^\infty \psi(k). \quad (72)$$

Нерівність (65) доведено.

Нехай  $g \in \mathfrak{M}_C$ . Оскільки  $\mathfrak{M}_C \subset \mathfrak{M}_0$ , то справедливості другої нерівності в (66) випливає з (65).

Врахувавши (72), маємо

$$\sum_{k=n}^\infty \psi(k) \leq \psi(n) + \int_n^\infty \psi(t) dt \leq \left( \frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)} \cdot \frac{1}{n} + 1 \right) \int_n^\infty \psi(t) dt. \quad (73)$$

Тоді на підставі формул (71)–(73) одержуємо

$$\psi(n)n \geq \frac{1}{\overline{\alpha}_n(g)} \int_n^\infty \psi(t) dt \geq \frac{1}{\overline{\alpha}_n(g)} \left( \frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)} \cdot \frac{1}{n} + 1 \right)^{-1} \sum_{k=n}^\infty \psi(k).$$

Отже, співвідношення (66), а отже і лему 3, доведено.

З (63) і (65) випливає нерівність

$$2 \sum_{k=n}^{2n-3} \psi(k) \left(1 - \frac{k}{2n-2}\right) < \frac{1}{2\underline{\alpha}_n(g)} \sum_{k=n}^\infty \psi(k), \quad (74)$$

Об'єднуючи (52), (62) і (74), отримаємо, що для довільних  $l \in \mathbb{N}$  і  $n \in \mathbb{N}$

$$|I_2| > \frac{1}{4} \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \left( 1 - \frac{1}{2l} - \frac{1}{2\underline{\alpha}_n(g)} \right) \sum_{k=n}^\infty \psi(k). \quad (75)$$

З іншої сторони, використовуючи твердження Д.1.1 з [3, с. 391] та формулу (22), переконуємось, що для довільного  $t_{n-1}(t) \in \mathcal{T}_{2n-1}$

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \|f_{D(l;n)}(t) - t_{n-1}(t)\|_\infty \|V_{D(l;n)}(t) - V_{n-1}(t)\|_1 \leq \\ &\leq 6\pi \|f_{D(l;n)}(t) - t_{n-1}(t)\|_\infty. \end{aligned} \quad (76)$$

З (75), (76) та умови  $\cos \frac{\beta\pi}{2} \neq 0$  отримаємо

$$\begin{aligned}
E_n(f_{D(l;n)})_\infty &= \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f_{D(l;n)}(t) - t_{n-1}(t)\|_\infty \geq \frac{1}{6\pi} |I_2| \geq \\
&\geq \frac{1}{24\pi} \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \left( 1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2\underline{\alpha}_n(g)} \right) \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \geq \\
&\geq \frac{1}{48\pi} \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \left( 1 - \frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)} \right) \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k).
\end{aligned} \tag{77}$$

Об'єднуючи (57) і (77) отримуємо (56). Теорему 3 доведено.

**Теорема 4.** Нехай  $\beta = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}, \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty, \psi(t) = g(t)t^{-1}, g \in \mathfrak{M}_0, i$

$$\underline{\alpha}_1(g) = \inf_{t \geq 1} \alpha(g; t) > 1.$$

Тоді для довільних  $n \in \mathbb{N}$  мають місце нерівності

$$\frac{1}{360\pi} \left( 1 - \frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)} \right) \psi(n)n \leq E_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \leq \mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \leq \left( 1 + \frac{2}{\pi} \right) \psi(n)n. \tag{78}$$

**Доведення теореми 4.** Спочатку знайдемо оцінку зверху для величини  $\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty$ . З формули (47) при  $\beta = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$ , випливає

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \leq \frac{1}{\pi} \|\Psi_{\beta,n}(t)\|_\infty = \frac{1}{\pi} \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \sin kt \right\|_\infty. \tag{79}$$

Відомо (див., наприклад, [15, с. 611])

$$\left| \sum_{j=1}^k \frac{\sin jx}{j} \right| \leq \frac{\pi}{2} + 1, \quad k \in \mathbb{N}, \quad 0 < x < 2\pi. \tag{80}$$

Застосувавши перетворення Абеля до суми  $\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \sin kt$ , та використавши те, що  $g(t) = \psi(t)t$  монотонно спадає, а також формулу (80), отримуємо

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \sin kt \right\|_\infty = \\
&= \left\| \sum_{k=n}^{\infty} (k\psi(k) - (k+1)\psi(k+1)) \sum_{j=1}^k \frac{\sin jt}{j} - n\psi(n) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sin jt}{j} \right\|_\infty \leq \\
&\leq \left( \frac{\pi}{2} + 1 \right) \sum_{k=n}^{\infty} |g(k) - g(k+1)| + \left( \frac{\pi}{2} + 1 \right) g(n) = \\
&= (\pi + 2)g(n) = (\pi + 2)\psi(n)n.
\end{aligned} \tag{81}$$



З формул (79) і (81) випливає оцінка зверху для величини  $\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty$  у випадку коли  $\cos \frac{\beta\pi}{2} = 0$ . А саме

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \leq \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \psi(n)n. \quad (82)$$

Знайдемо оцінку знизу величин  $E_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty$ . Розглянемо функцію

$$f_n^*(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_\beta(\tau) \varphi_n^*(t - \tau) d\tau, \quad (83)$$

де

$$\varphi_n^*(t) = \frac{-1}{5\pi n} \left( \sum_{k=1}^n k \sin kt + \sum_{k=n+1}^{2n} (2n+1-k) \sin kt \right). \quad (84)$$

Покажемо, що  $\|\varphi_n^*\|_1 \leq 1$ . Очевидно,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n k \sin kt + \sum_{k=n+1}^{2n} (2n+1-k) \sin kt \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=n+1}^{2n} (2n+1-k) = n(n+1), \quad 0 \leq |t| \leq \pi. \end{aligned} \quad (85)$$

Застосовуючи перетворення Абеля до кожної з сум в (84), отримуємо

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n k \sin kt + \sum_{k=n+1}^{2n} (2n+1-k) \sin kt = \\ & = - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^k \sin jt + n \sum_{j=1}^n \sin jt + \sum_{k=n+1}^{2n-1} \sum_{j=1}^k \sin jt + \sum_{j=1}^{2n} \sin jt - n \sum_{j=1}^n \sin jt = \\ & = - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^k \sin jt + \sum_{k=n+1}^{2n} \sum_{j=1}^k \sin jt. \end{aligned} \quad (86)$$

Використавши рівність

$$\sum_{k=0}^N \cos(kt + \gamma) = \cos\left(\frac{N}{2}t + \gamma\right) \sin \frac{(N+1)t}{2} \operatorname{cosec} \frac{t}{2}, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad 0 < |t| \leq \pi,$$

(див., наприклад, [14, с. 43]) з (86) отримуємо

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n k \sin kt + \sum_{k=n+1}^{2n} (2n+1-k) \sin kt \right| = \\ & = \left| - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos \frac{t}{2} - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\cos \frac{t}{2} - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2|\sin \frac{t}{2}|} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \cos \left( k + \frac{1}{2} \right) t - \sum_{k=n+1}^{2n} \cos \left( k + \frac{1}{2} \right) t \right| = \\
&= \frac{1}{2|\sin \frac{t}{2}|} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \cos \left( k + \frac{1}{2} \right) t - \sum_{k=0}^{2n} \cos \left( k + \frac{1}{2} \right) t + \sum_{k=0}^n \cos \left( k + \frac{1}{2} \right) t \right| \leq \\
&\leq \frac{3}{2(\sin \frac{t}{2})^2}, \quad 0 < |t| \leq \pi.
\end{aligned} \tag{87}$$

Зі співвідношення (87) та нерівності

$$\sin \frac{t}{2} \geq \frac{t}{\pi}, \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

маємо

$$\left| \sum_{k=1}^n k \sin kt + \sum_{k=n+1}^{2n} (2n+1-k) \sin kt \right| \leq \frac{3\pi^2}{2t^2}, \quad 0 < |t| \leq \pi. \tag{88}$$

З (85) і (88) випливає, що

$$\begin{aligned}
\|\varphi_n^*\|_1 &\leq \frac{1}{5\pi n} \left( \int_{|t| \leq \frac{\pi}{n}} n(n+1) dt + \frac{3\pi^2}{2} \int_{\frac{\pi}{n} \leq |t| \leq \pi} \frac{dt}{t^2} \right) = \\
&= \frac{1}{5\pi n} (2\pi(n+1) + 3\pi(n-1)) < 1.
\end{aligned}$$

Оскільки  $\|\varphi_n^*\|_1 \leq 1$  і  $\varphi_n^* \perp 1$ , то  $f_n^* \in L_{\beta,1}^\psi$ .

З урахуванням формул (83), (84) та твердження (3.7.1) роботи [1, с. 134] неважко переконатись, що для функції  $f_n^*$  вигляду (83) має місце рівність

$$f_n^*(t) = \frac{1}{5\pi n} \left( \sum_{k=1}^n k \psi(k) \cos kt + \sum_{k=n+1}^{2n} (2n+1-k) \psi(k) \cos kt \right). \tag{89}$$

Розглянемо інтеграл

$$I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} (f_n^*(t) - t_{n-1}(t))(V_{2n}(t) - V_n(t)) dt, \tag{90}$$

де  $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$ , а  $V_m(t)$  — суми Валле Пуссена вигляду (19). Використавши твердження Д.1.1 з [3, с. 391] та нерівність (22), отримаємо

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \|f_n^*(t) - t_{n-1}(t)\|_\infty \|V_{2n}(t) - V_n(t)\|_1 \leq \\
&\leq 6\pi \|f_n^*(t) - t_{n-1}(t)\|_\infty.
\end{aligned} \tag{91}$$

Оскільки, згідно з (19)

$$V_{2n}(t) - V_n(t) =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n} \cos kt + 2 \sum_{k=2n+1}^{4n-1} \left(1 - \frac{k}{4n}\right) \cos kt - 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(1 - \frac{k}{2n}\right) \cos kt,$$

то, враховуючи формули (33), (89), (90), та виконуючи елементарні перетворення, запишемо оцінку знизу

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-\pi}^{\pi} f_n^*(t)(V_{2n}(t) - V_n(t))dt = \\ &= \frac{1}{5\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k=1}^n k\psi(k) \cos kt + \sum_{k=n+1}^{2n} (2n+1-k)\psi(k) \cos kt \right) \times \\ &\times \left( \sum_{k=n+1}^{2n} \cos kt + 2 \sum_{k=2n+1}^{4n-1} \left(1 - \frac{k}{4n}\right) \cos kt - 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(1 - \frac{k}{2n}\right) \cos kt \right) dt = \\ &= \frac{1}{5n} \left( \sum_{k=n+1}^{2n} (2n+1-k)\psi(k) - 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} (2n+1-k)\psi(k) \left(1 - \frac{k}{2n}\right) \right) = \\ &= \frac{1}{5n^2} \sum_{k=n+1}^{2n} \psi(k)(2n+1-k)(k-n) \geq \\ &= \frac{\psi(2n)}{5n^2} \left( (2n+1) \sum_{k=n+1}^{2n} (k-n) - \sum_{k=n+1}^{2n} k^2 + n \sum_{k=n+1}^{2n} k \right) = \\ &= \frac{\psi(2n)}{5n^2} \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(3n+1)}{2} \right) = \\ &= \frac{\psi(2n)}{10n} \left( \frac{1}{3}n^2 + n + \frac{2}{3} \right) > \frac{1}{30}\psi(2n)n = \\ &= \frac{1}{30}\psi(n)n \frac{\psi(2n)}{\psi(n)} = \frac{1}{60}\psi(n)n \frac{g(2n)}{g(n)}. \end{aligned} \tag{92}$$

Оскільки

$$\frac{g(2n)}{g(n)} = \frac{g(2n) - g(n)}{g(n)} + 1 > \frac{g'(n)n}{g(n)} + 1 = 1 - \frac{1}{\alpha(g; n)} \geq 1 - \frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)},$$

то використовуючи співвідношення (91), (92), отримаємо, що для довільного  $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$  справедлива оцінка

$$\begin{aligned} \|f_n^*(t) - t_{n-1}(t)\|_{\infty} &\geq \frac{1}{6\pi} I_3 \geq \\ &\geq \frac{1}{6\pi} \frac{1}{60} \psi(n)n \frac{g(2n)}{g(n)} \geq \end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{360\pi} \left(1 - \frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)}\right) \psi(n)n.$$

Тому, в силу довільності полінома  $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$ , одержуємо оцінку

$$E_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \geq \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f_n^*(t) - t_{n-1}(t)\|_\infty \geq \frac{1}{360\pi} \left(1 - \frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)}\right) \psi(n)n. \quad (93)$$

Об'єднуючи (82) і (93), отримуємо (78). Теорему 4 доведено.

Прикладами функцій  $\psi$ , які задовольняють умови теорем 3–4 є функції:

- 1)  $\psi(t) = t^{-r}$ ,  $1 < r < 2$ ;
- 2)  $\psi(t) = t^{-1} \ln^{-\gamma}(t + K_1)$ ,  $K_1 \geq e^\gamma$ ,  $\gamma > 1$ ;
- 3)  $\psi(t) = t^{-1} \ln^{-\gamma}(t + K_1)(\ln \ln(t + K_2))^{-\delta}$ ,  $\gamma \geq 1$ ,  $\delta > 1$ ,  $K_2 \geq K_1 \geq e^{\gamma+\delta}$ ,

та інші.

Із теорем 3–4 безпосередньо випливає твердження.

**Наслідок 4.** Нехай  $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$ ,  $\psi(t) = g(t)t^{-1}$ ,  $g \in \mathfrak{M}_0$  і  $\underline{\alpha}_1(g) > 1$ . Тоді, якщо  $\beta \in \mathbb{R}$  такі, що  $\cos \frac{\beta\pi}{2} \neq 0$ , то для довільного  $n \in \mathbb{N}$  справедливі порядкові оцінки

$$E_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \asymp \mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \asymp \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k); \quad (94)$$

а якщо ж  $\cos \frac{\beta\pi}{2} = 0$ , то

$$E_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \asymp \mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \asymp \psi(n)n. \quad (95)$$

Якщо в умовах наслідку 4  $g \in \mathfrak{M}_C$ , то згідно зі співвідношенням (66), має місце порядкова рівність

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \asymp \psi(n)n.$$

Отже, в цьому випадку має місце твердження.

**Наслідок 5.** Нехай  $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$ ,  $\psi(t) = g(t)t^{-1}$ ,  $g \in \mathfrak{M}_C$ ,  $\underline{\alpha}_1(g) > 1$ . Тоді для довільних  $\beta \in \mathbb{R}$  справедливі порядкові оцінки

$$E_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \asymp \mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \asymp \psi(n)n. \quad (96)$$

Справедливість порядкових оцінок (96) було встановлено раніше в [5].

Наведемо наслідок з теорем 3–4 для функцій  $\psi(t) = t^{-1} \ln^{-\gamma}(t + e^\gamma)$ ,  $\gamma > 1$ .

**Наслідок 6.** Нехай  $\psi(t) = t^{-1} \ln^{-\gamma}(t + e^\gamma)$ ,  $\gamma > 1$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ , і  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Тоді

$$E_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \asymp \mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \asymp \begin{cases} \psi(n)n \ln n, & \cos \frac{\beta\pi}{2} \neq 0, \\ \psi(n)n, & \cos \frac{\beta\pi}{2} = 0. \end{cases} \quad (97)$$

**Доведення наслідку 6.** Покажемо, що для функцій  $\psi(t) = t^{-1} \ln^{-\gamma}(t + e^\gamma)$ ,  $\gamma > 1$ , виконуються умови теорем 3–4. Дійсно, для них

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln^\gamma(k + e^\gamma)} < \infty$$

i

$$\alpha(g; t) = \frac{\ln(t + e^\gamma)}{\gamma} \frac{t + e^\gamma}{t} > \frac{\ln(t + e^\gamma)}{\gamma} > 1.$$

Якщо  $\cos \frac{\beta\pi}{2} = 0$ , то порядкова оцінка (97) безпосередньо впливає з (95). Покажемо справедливість (97) у випадку коли  $\cos \frac{\beta\pi}{2} \neq 0$ . Враховуючи нерівність (73) та монотонність функції  $\psi(t)$  маємо

$$\int_n^\infty \psi(t) dt \leq \sum_{k=n}^\infty \psi(k) \leq \left( \frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)} \cdot \frac{1}{n} + 1 \right) \int_n^\infty \psi(t) dt \leq 2 \int_n^\infty \psi(t) dt. \quad (98)$$

Тоді з (94) і (98) одержуємо

$$\begin{aligned} E_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty &\asymp \mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \asymp \\ &\asymp \sum_{k=n}^\infty \psi(k) \asymp \int_n^\infty \psi(t) dt \asymp \int_n^\infty \frac{dt}{t \ln^\gamma(t + e^\gamma)} \asymp \\ &\asymp \ln^{1-\gamma} n \asymp \psi(n) n \ln n, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Наслідок 6 доведено.

## Література

- [1] СТЕПАНЕЦ А.И. *Методы теории приближений*: В 2 ч. // Праці Інституту математики НАН України — Киев: Ін-т математики НАН України, 2002. — 40. — Ч.І. — 427 с.
- [2] ЗИГМУНД А. *Тригонометрические ряды*. В 2 т. — М.: Мир, 1965. — Т. II. — 538 с.
- [3] КОРНЕЙЧУК Н.П. *Точные константы в теории приближения*. — М.: Наука, 1987. — 424 с.
- [4] TEMLYAKOV V.N. *Approximation of Periodic Function*: NY: Nova Science Publishers, Inc. — 1993. — 419p.
- [5] СЕРДЮК А.С., ГРАБОВА У.З. Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів  $(\psi, \beta)$  — диференційовних функцій // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, №9. — С. 1186 – 1197.
- [6] СТЕПАНЕЦ А.И. *Классификация и приближение периодических функций*. — Киев: Наук. думка — 1987. — 268 с.
- [7] СЕРДЮК А.С., СТЕПАНЮК Т.А. Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів нескінченно диференційовних функцій// Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. 2013. — **10**, №1. — С. 255–282.
- [8] СЕРДЮК А.С., СОКОЛЕНКО І.В. Наближення лінійними методами класів  $(\psi, \bar{\beta})$ –диференційовних функцій // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: Інститут математики НАН України, 2013. — **10**, №1. — С. 245–254.
- [9] СЕРДЮК А.С. Про один лінійний метод наближення періодичних функцій// Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — Київ: Інститут математики НАН України, — 2004. — Т.1, №1. — С. 294–336.
- [10] СЕРДЮК А.С. Про найкраще наближення на класах згорток періодичних функцій // Теорія наближення та її застосування: Пр. Ін-ту математики НАН України. Т.41. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. — С. 168–189.
- [11] СЕРДЮК А.С. Найкращі наближення і поперечники класів згорток періодичних функцій високої гладкості // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, №7. — С.946 – 971.
- [12] SERDYUK A.S., STEPANIUK T.A. Order estimates of the best approximations and approximations of Fourier sums of classes of convolutions of periodic functions of not high smoothness in uniform metric // Arxiv preprint, arXiv:1403.5311, 2014. — 20 p.
- [13] ЗИГМУНД А. *Тригонометрические ряды*. В 2 т. — М.: Мир, 1965. — Т. I. — 615 с.

- [14] ГРАДШТЕЙН И.С., РЫЖИК И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. — М.: Физматиз, 1962. — 1100 с.
- [15] ФИХТЕНГОЛЬЦ Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. В 3 т. — М.: Наука, 1969. — Т.III. — 656 с.

E-mail: [tania\\_stepaniuk@ukr.net](mailto:tania_stepaniuk@ukr.net)